UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215726 9

Guldberg, Alf
Sur les analogies entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point

QA
551
G8

Pamph
MAG

Sur les

Analogies entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point

par

Alf Guldberg

Videnskabsselskabets Skrifter. I. Mathematisk-naturv. Klasse. 1902. No 9.

Christiania
En commission chez Jacob Dybwad
Imprimerie de A. W. Brøgger
1902

Fremlagt i den mathematisk-naturvidenskabelige klasses møde d. 30te mai 1902.

QA
551
G8

Sur les analogies entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point

par

Alf Guldberg.

Les analogies qui existent entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point sont déjà signalés par Mac-Laurin. Plus tard Ossian Bonnet[1] et MM. Paul Serret[2] et Appell[3] se sont occupés de ces analogies.

Considérons un fil flexible et inextensible, ayant partout une égale épaisseur. Supposons ses extrémités fixées d'une manière invariable aux deux points A et B, et chacun de ses éléments sollicité par une force déterminée assujettie à la seule condition de varier d'une manière continue tant en grandeur qu'en direction quand on passe d'un élément à l'élément suivant; nous aurons, pour l'équilibre d'un élément quelconque, les trois équations connues

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X &= 0 \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y &= 0 \qquad \text{(A)} \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z &= 0, \end{aligned}$$

x, y, z représentant les coordonnées rectangulaires d'un point d'élément considéré, s l'arc du fil compris entre un point fixe et le point variable (x, y, z), T la tension en ce dernier point, X, Y, Z les forces extérieures rapportées à l'unité de longueur et parallèlles aux axes qui répondent au même

[1] Journal de mathématiques t. IX.

[2] Théorie nouvelle des lignes à double courbure.

[3] Comptes rendus de l'Académie des Sciences t. XCVI.

point, et enfin, toutes les différentielles se rapportant à un même déplacement infiniment petit effectué sur le fil, dans un sens qui pourrait être quelconque, mais que nous supposerons toujours être celui dans lequel sont comptées les valeurs positives de s, pour fixer les idées et pour rendre positive la différentielle ds.

Considérons maintenant le mouvement dans l'espace d'un point matériel quelconque; soient x, y, z les coordonnées du point par rapport à trois axes quelconques; X, Y, Z les composantes des forces accélératrices suivant ces trois axes, on aura, comme l'on sait, les trois équations

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y \qquad \text{(B).}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z,$$

m désignant la masse du point matériel.

En regardant les deux systèmes d'équations (A) et (B) on voit immédiatement une analogie frappante; pour mieux mettre en relief les rapprochements qui en sont des conséquences nous nous servirons d'un texte à deux colonnes, et nous prendrons les théorèmes du mouvement d'un point comme point de départ.

1. Théorème de la projection de la quantité de mouvement.

La première des équations du système (B) est

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X,$$

comme l'axe des x est arbitraire, cette équation exprime que

La dérivée par rapport au temps de la projection de la quantité de mouvement sur un axe est égale à la somme des projections des forces appliquées au point mobile.

1. Théorème de la projection de la tension.

La première des équations du système (A) est

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = -X,$$

comme l'axe des x est arbitraire, cette équation exprime que

La dérivée par rapport aux longueurs de la projection de la tension sur un axe est égale et opposée à la somme des projections des forces appliquées au fil.

En particulier, si la somme des projections des forces sur un axe est constamment nulle, ce théorème montre que la projection de la quantité de mouvement sur cet axe est constante. En effet, en prenant cet axe pour axe Ox, on a

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=0$$

ou

$$m\frac{dx}{dt}=A.$$

Exemple. *Forces parallèles.*

Supposons les forces données parallèles à une direction fixe. La trajectoire est alors dans un plan parallèle à cette direction. En effet, prenant pour axe Oz une parallèle à la direction de la résultante F, on a constamment $X=0$, $Y=0$. Donc

$$m\frac{dx}{dt}=A, \quad m\frac{dx}{dt}=B$$

d'où:

$$Ady-Bdx=0$$

et en intégrant

$$Ay-Bx=C,$$

équation d'un plan parallèle à l'axe Oz.

2. Théorème du moment de la quantité de mouvement.

Les deux premières équations du système (B):

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=X, \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right)=Y$$

En particulier, si la somme des projections des forces sur un axe est constamment nulle, ce théorème montre que la projection de la tension sur cet axe est constante. En effet, en prenant cet axe pour axe Ox, on a

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

ou

$$T\frac{dx}{ds}=A.$$

Exemple. *Forces parallèles.*

Supposons les forces extérieures parallèlles à une direction fixe. La figure d'équilibre est alors une courbe plane dont le plan est parallèle à la direction de ces forces. Supposons l'axe Oz parallèle à cette direction; X et Y sont constamment nulles. Donc

$$T\frac{dx}{ds}=A, \quad T\frac{dy}{ds}=B.$$

éliminons T entre ces équations il reste:

$$Ady-Bdx=0$$

d'où:

$$Ay-Bx=C$$

équation d'un plan paralléle à l'axe Oz.

2. Théorème du moment de la tension.

Les deux premières équations du système (A):

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=-X, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=-Y$$

fournissent la combinaison:

$$x \frac{d}{dt}\left(m \frac{dy}{dt}\right) - y \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= x\,Y - y\,X,$$

qu'on peut écrire:

$$\frac{d}{dt}\left[x\left(m \frac{dy}{dt}\right) - y\left(m \frac{dx}{dt}\right)\right] =$$

$$= x\,Y - y\,X$$

c'est à dire que

La dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe (l'axe Oz), est égale au moment de la résultante des forces par rapport au même axe.

En particulier, si $x\,Y - y\,X$ est constamment nul, nous aurons

$$\frac{d}{dt}\left[x\left(m \frac{dy}{dt}\right) - y\left(m \frac{dx}{dt}\right)\right] = 0$$

ou

$$x\left(m \frac{dy}{dt}\right) - y\left(m \frac{dx}{dt}\right) = C.$$

C'est à dire que *si la résultante des forces données est constamment dans un même plan avec un axe (l'axe Oz) le moment de la quantité du mouvement par rapport à cet axe est constant. (Principe des aires).*

Inversement, si le moment de la quantité du mouvement par rapport à un axe, par exemple Oz, est constant, la force est dans un même plan avec Oz, car l'équation

fournissent la combinaison:

$$x \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) - y \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) =$$

$$= -[x\,Y - y\,X]$$

qu'on peut écrire:

$$\frac{d}{ds}\left[x\left(T \frac{dy}{ds}\right) - y\left(T \frac{dx}{ds}\right)\right] =$$

$$= -[x\,Y - y\,X]$$

c'est à dire que

La derivée par rapport aux longueurs du moment de la tension, par rapport à un axe (l'axe Oz), est égale et opposée au moment de la résultante des forces extérieures par rapport au même axe.

En particulier, si $x\,Y - y\,X$ est constamment nul, nous aurons

$$\frac{d}{ds}\left[x\left(T \frac{dy}{ds}\right) - y\left(T \frac{dx}{ds}\right]\right. = 0$$

ou

$$x\left(T \frac{dy}{ds}\right) - y\left(T \frac{dx}{ds}\right) = C.$$

C'est à dire que *si la force extérieure est constamment dans un même plan avec un axe (l'axe Oz), le moment de la tension par rapport à cet axe est constant.*

Inversement, si le moment de la tension par rapport à un axe, par exemple Oz, est constant, la force extérieure est dans un même plan avec Oz, car l'équation

$$x\left(m\frac{dy}{dt}\right)-y\left(m\frac{dx}{dt}\right)=C$$

donne par différentiation

$$x\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right)-y\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=0.$$

d'où

$$x\,Y-y\,X=0.$$

Exemple. *Forces centrales.*

Supposons que la résultante F des forces appliquées au point soit centrale, c'est à dire que sa direction passe constamment par un point fixe O. Si l'on prend ce point pour origine, le moment de F par rapport à chacun des trois axes de coordonnées est nul et le théorème démontré s'applique aux trois axes et donne

$$y\left(m\frac{dz}{dt}\right)-z\left(m\frac{dy}{dt}\right)=A$$

$$z\left(m\frac{dx}{dt}\right)-x\left(m\frac{dz}{dt}\right)=B$$

$$x\left(m\frac{dy}{dt}\right)-y\left(m\frac{dx}{dt}\right)=C;$$

multiplions ces équations respectivement par x, y, z, et ajoutons les membre à membre, il vient

$$Ax+By+Cz=0.$$

La trajectoire est donc plane et son plan passe par l'origine.

$$x\left(T\frac{dy}{ds}\right)-y\left(T\frac{dx}{ds}\right)=C.$$

donne par différentiation

$$x\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)-y\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

d'où

$$x\,Y-y\,X=0.$$

Exemple. *Forces centrales.*

Supposons que la résultante F des forces extérieures soit centrale, c'est à dire que sa direction passe constamment par un point fixe O. Si l'on prend ce point pour origine, le moment de F par rapport à chacun des trois axes est nul et le théorème démontré s'applique aux trois axes et donne

$$y\left(T\frac{dz}{ds}\right)-z\left(T\frac{dy}{ds}\right)=A$$

$$\left(T\frac{dx}{ds}\right)-x\left(T\frac{dz}{ds}\right)=B$$

$$x\left(T\frac{dy}{ds}\right)\quad y\left(T\frac{dx}{ds}\right)=C;$$

multiplions ces équations par x, y, z, et ajoutons, il vient

$$Ax+By+Cz=0.$$

La courbe d'équilibre est donc plane et son plan passe par l'origine.

3. Théorème des forces vives.

Multiplions les équations du système (B) respectivement par dx, dy, dz, et ajoutons-les membre à membre il vient

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) =$$
$$= Xdx + Ydy + Zdz;$$

en remarquant que le carré de la vitesse est

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

on peut écrire cette équation

$$d\left(\frac{mv}{2}\right)^2 = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Si la résultante X, Y, Z ne dépend que de la position du point matériel et dérive d'une fonction de forces $U(x, y, z)$ on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU(x, y, z).$$

On aura donc

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U(x, y, z)$$
$$- U(x_0 y_0 z_0)$$

ou

$$mv^2 = 2\,[U(x, y, z) + h], \quad \text{(a)}$$

h désignant la constante arbitraire

$$\frac{mv_0^2}{2} - U(x_0 y_0 z_0).$$

3. Théorème de la tension.

Multiplions les équations du systéme (A) respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et ajoutons-les membre à membre, il vient

$$dT = -(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Si la résultante X, Y, Z ne dépend que de x, y, z et dérive d'une fonction des forces $U(x, y, z)$ on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\,U(x, y, z)$$

et nous aurons:

$$dT = -dU$$

ou

$$T = -(U + h) \qquad \text{a),}$$

h désignant une constante.

L'équation (a) montre que le fil ne peut être en équilibre que dans la région de l'espace dans laquelle $U(x, y, z) + h$ est négatif, car le premier membre est essentiellement positif. Quand cette région ne comprend pas tout l'espace, elle est en général limitée par la surface de niveau ayant pour équation

$$U(x, y, z) + h = 0,$$

surface dont la nature dépend de la constante h, c'est à dire de la position initiale et de la grandeur de la tension, mais non de la direction.

L'équation (a) montre que le point matériel ne peut pas sortir de la région de l'espace dans laquelle $U(x, y, z) + h$ est positif, car le premier membre est essentiellement positif. Quand cette région ne comprend pas tout l'espace, elle est en général limitée par la surface de niveau ayant pour équation

$$U(x, y, z) + h = 0,$$

surface dont la nature dépend de la constante h, c'est à dire de la position initiale et de la grandeur de la vitesse mais non de sa direction.

Imprimé le 11 octobre 1902.

QA
551
G8

Guldberg, Alf
Sur les analogies entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY